数理解析研究所講究録
948巻 1996年 48-57

2つの generator をもつ shift について

新潟大 理、 渡辺 恵一 (Keiichi WATANABE)

R.T.Powers[7] は hyperfinite II_1-factor R 上の(injective) *-endomorphism σ で $\bigcap_{k=1}^{\infty} \sigma^k(R) = \mathbb{C}1$ を満たすものを shift と呼び、σ の index を Jones index $[R:\sigma(R)]$ により定義した。R 上の shift σ が Powers の binary shift であるとは、R の unitary元 u が

(1) $u^2 = 1$

(2) $\{\sigma^i(u); i = 0,1,2,\cdots\}'' = R$

(3) $u\sigma^k(u) = \pm\sigma^k(u)u$

を満たすように存在するときをいう。この unitary u は σ の generator と呼ばれる。条件(3)により、$u\sigma^k(u) = (-1)^{a(k)}\sigma^k(u)u$ なる signature sequence a (すなわち $\mathbb{Z}$ から $\{0,1\}$ への map で $a(n) = a(-n)$ をみたすもの) が存在する。Powers は、binary shift が共役であるための必要十分条件は signature sequence が一致することであることを示した。外部共役に関しては、その後様々な興味深い研究が行われている。一方、長田(ま)[2]、Price [9] は binary shift を、その条件(1)を $u^n=1$ とした n-shift に一般化した。これはさらに榎本-長田(ま)-綿谷[4]、Bures-Yin [1] によって group shift として一般化されている。

$u^2 = 1$ の 2 を n とする代わりに、generator の個数を複数にしたらどうなるであろうか? ここでは、見かけ上2つの generator を持つような shift について若干の注意を述べることにする。

定義　R 上の shift σ が2つの generator を持つとは、R の unitary元 u, v が、

(1) $u^2 = 1$, $v^2 = 1$

(2) $\{\sigma^i(u), \sigma^j(v); i,j = 0,1,2,\cdots\}'' = R$

(3) $u\sigma^{i}(u) = \pm\sigma^{i}(u)u \quad v\sigma^{j}(v) = \pm\sigma^{j}(v)v$

$\sigma^{i}(u)\sigma^{j}(v) = \pm\sigma^{j}(v)\sigma^{i}(u)$

を満たすように存在するときをいう。

定義により、交換反交換を司る signature sequence は

$u\sigma^{i}(u) = (-1)^{a_1(i)}\sigma^{i}(u)u, \quad v\sigma^{j}(v) = (-1)^{a_2(j)}\sigma^{j}(v)v,$

$\sigma^{i}(u)\sigma^{j}(v) = (-1)^{b(i-j)}\sigma^{i}(v)\sigma^{j}(u)$

の様に３つ現れ、b(0) = 0 である必要はない。
まず、Bures-Yin[1;Proposition 2.1] により、２つの generator を持つ shift は group shift であることに注意しよう。そこで、group shift を signature sequence と関連させて扱うために用語と記号の準備をする。榎本-長田（ま）-綿谷[4]は binary shift の諸結果を group shift へ一般化するために commutation relator の概念を導入し、commutation relator 全体の集合と、その群の制限直積上の bicharacter のあるクラスとの間に一対一対応があることを示した。

定義　G を可算離散群、$G_i = G(i = 0,1,2,\cdots)$, $X = \coprod_{i=0}^{\infty} G_i$（制限直積）、$\rho_i;G \to G_i \subset X$(canonical isomorphism) とする。このとき、map $a;\mathbb{Z}\times G\times G \to \mathbb{T}$ が commutation relator であるとは、

(1) $a(n;gh,k) = a(n;g,k)a(n;h,k)$

(2) $a(n;g,hk) = a(n;g,h)a(n;g,k)$

(3) $a(n;g,h) = \overline{a(-n;h,g)} \qquad n \in \mathbb{Z},\ g,h,k \in G$

を満たすときをいう。
commutation relator 全体の集合を Comm(G) とかく。

s を制限直積 X 上の canonical shift とする。Bich(X,$\mathbb{T}$) を次の(a),(b),(c)を満たす map $m;X\times X \to \mathbb{T}$ 全体の集合とする：
(a) m は bicharacter

(b) $m(s(x),s(y)) = m(x,y)$

(c) $m(\rho_i(g),\rho_j(h)) = 1$ if $i < j$.

注意　上の定義が榎本-長田（ま）-綿谷のものと異なるのは次の事のみである：

commutation relator が $\{0\}\times G\times G$ で定義され、値 1 の必要がない、

$\mathrm{Bich}(X,\mathbb{T})$ の条件(c)が $i \leqq j$ でなく $i < j$ である。

次の補題は[4;Lemma 3.1]と全く同様に示される。

補題１．　$\mathrm{Comm}(G)$ と $\mathrm{Bich}(X,\mathbb{T})$ の間には次によって一対一対応が存在する：

$$m(x,y) = \{a(i-j;x(i),y(j));i\geqq j,i\geqq 0,j\geqq 0\}$$

$$a(n;g,h) = \begin{cases} m(\rho_i(g),\rho_j(h))/m(\rho_j(h),\rho_i(g)) & \text{if } n = i-j > 0 \\ m(\rho_i(g),\rho_i(h)) & \text{if } n = 0. \end{cases}$$

以後、$G = \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2$ とし、その元を $\binom{0}{0},\binom{1}{0},\binom{0}{1},\binom{1}{1}$ の様に書く。また、$e_j{}^1 = \rho_j(\binom{1}{0})$, $e_j{}^2 = \rho_j(\binom{0}{1})$ とおいて、制限直積 $X = \coprod G_i$ の元 g を

$$g = \sum_{j=0}^{\infty} g_j{}^1 e_j{}^1 + g_j{}^2 e_j{}^2,\quad g_j{}^1,\ g_j{}^2 \in \mathbb{Z}_2$$

と書くことにする。

a_1, a_2, b を signature sequence、$a_1(0) = a_2(0) = 0$ とする。$\mathrm{Comm}(G)$ の元 a は

$$a(n;\tbinom{1}{0},\tbinom{1}{0}) = (-1)^{a_1(n)},\quad a(n;\tbinom{0}{1},\tbinom{0}{1}) = (-1)^{a_2(n)} \text{ 及び}$$
$$a(n;\tbinom{1}{0},\tbinom{0}{1}) = (-1)^{b(n)}$$

に依って一意に定まる。このとき、補題１により a に対応する $\mathrm{Bich}(X,\mathbb{T})$ の元 m が存在し、$\lambda_m(X)''$ 上の group shift を引きおこすが（$\lambda_m(X)''$ が factor となるための条件については後述）、

これは2つの generator $\lambda_m(e_0{}^1)$, $\lambda_m(e_0{}^2)$ をもつ。但し、λ_m は m の引きおこす左正則射影表現、すなわち、

$$(\lambda_m(x)\xi)(y) = m(x, x^{-1}y)\xi(x^{-1}y),\quad \xi \in \ell^2(X).$$

逆に、2つの generator をもつ shift は $\mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2$-shift であろうか。例えば、generator u をもつ binary shift σ は $v = \sigma(u)$ とおけば、2つの generator をもつことになる。このようなものを除くためには、2つの generator の shift像が生成する von Neumann subalgebras に適当な条件を課せばよい。

命題2.　σ を2つの generator u, v をもつ shift とする。$P = \{\sigma^i(u); i = 0,1,2,\cdots\}''$, $Q = \{\sigma^j(v); j = 0,1,2,\cdots\}''$ とおく。$P \cap Q = \mathbb{C}1$, $\dim P = \infty$, $\dim Q = \infty$ と仮定するならば、σ は $\mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2$-shift と共役である。

証明　$S = \{u, v\}$ とおき、$\{\sigma^k(S); k = 0,1,2,\cdots\}$ の生成する unitary subgroup を $G_\sigma(S)$ 、商群 $G_\sigma(S)/G_\sigma(S)\cap\mathbb{C}$ を Y とかく。[1;Proposition 2.1]を考えれば、Y が $\coprod \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2$ に同型であることを示せばよいことがわかる。群同型 $\Phi; Y \to \coprod \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2$ は次のように定義できる:

$$\Phi([u^{k(0)}\sigma(u)^{k(1)}\cdots\sigma^n(u)^{k(n)}v^{l(0)}\sigma(v)^{l(1)}\cdots\sigma^n(v)^{l(n)}])$$
$$= k(0)e_0{}^1 + \cdots k(n)e_n{}^1 + l(0)e_0{}^2 + \cdots l(n)e_n{}^2.$$

実際、$[u^{k(0)}\cdots\sigma^n(u)^{k(n)}v^{l(0)}\cdots\sigma^n(v)^{l(n)}] = 1_Y$ ならば、あるスカラー α が存在して

$$u^{k(0)}\cdots\sigma^n(u)^{k(n)} = \alpha v^{l(0)}\cdots\sigma^n(v)^{l(n)}$$

であるから、$P \cap Q = \mathbb{C}1$ の仮定により

$$u^{k(0)}\cdots\sigma^n(u)^{k(n)} \in \mathbb{C}1$$

となる。さらに $\dim P = \infty$, $\dim Q = \infty$ の仮定により $k(0) = \cdots k(n) = l(0) = \cdots l(n) = 0$ でなければならない。　終

注意　上の命題の仮定について、もし $u \notin \sigma(R)$ ならば dim P

$= \infty$ となる。実際、$\{\sigma^k(u); k = 0,1,2,\cdots\}$ が一次独立。

相対可換子環について

以後、$\mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2$-shift の相対可換子環について考える。group shift としては、相対可換子環はある部分群の言葉で述べられるが（[1;Proposition 1.2]）、ここではそれを、binary shift の場合に準じて、３つの signature sequence と具体的に関連させたい。a_1, a_2, b を $b(0) = 0$ とは限らない signature sequence とし、m を対応する $\mathrm{Bich}(X,\mathbb{T})$ の元とする。m は次のように second exterior product $X \wedge X$ 上の multiplier ρ を誘導する：

$$\rho(g \wedge h) = m(g,h)\overline{m(h,g)}, \quad g,h \in X.$$

相対可換子 $\sigma^n(\lambda_m(X)'')' \cap \lambda_m(X)''$ を調べるには、$\{g \in X; \rho(g \wedge s^n(X)) = 1\}$ を調べればよい（cf.[1;Proposition 1.2]）。次の補題は簡単な計算で示される。

補題３．　X の元 $g = \sum g_j{}^1 e_j{}^1 + g_j{}^2 e_j{}^2$ に対して次は同値：

(1) $\rho(g \wedge s^n(X)) = 1$

(2) $\sum g_j{}^1 a_1(k-j) + g_j{}^2 b(k-j) = 0, \quad k \geqq n$

$\quad\;\; \sum g_j{}^1 b(k-j) + g_j{}^2 a_2(k-j) = 0, \quad k \geqq n$

Price は 2-shift に対して、$\coprod \mathbb{Z}_2$ 上の multiplier m が non degenerate(i.e, $\lambda_m(X)''$ がfactor) であることは、対応する signature sequence a が non periodic であることと同値である事を示した。$\mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2$-shift ではこれは成立しない。

例１．　$a_1 = a_2 = (0,0,\underline{1,0},\cdots)$, $b = (1,\underline{0},\cdots)$ とすると（アンダーラインは反復する部分を示す）、これらはすべて non periodic であるが、対応する m は degenerate である。実際、$g = e_0{}^1$

$+ e_0^2 + e_2^1 + e_2^2$ とおくと $\rho(g \wedge X) = 1$ となる。

signature sequence a が essentially periodic であるとは、整数 $p > 0$ 及び $N \geqq 0$ が $a(i+p) = a(i)$, $i \geqq N$ を満たすように存在するときをいう。次の命題の証明は、n-shift に対するものと同様にすればできる（cf.たとえば[1;Lemma 3.4]）。

命題4.　$\lambda_m(X)''$ が factor でないならば、a_1, a_2, b は全て essentially periodic である。

この命題の逆は成立しない。

例2.　$a_1 = (0,1,\underline{0},\cdots)$, $a_2 = (0,\underline{1},\cdots)$, $b = (1,\underline{0},\cdots)$ とすると、これらはすべて essentially periodic であるが、$\lambda_m(X)''$ は factor である。

定理5.　a_1, a_2, b を 0 でない signature sequence で support が有限なものとする。

$$d_1 = \max\{i \in \mathbb{N}; a_1(i) \neq 0\}$$
$$d_2 = \max\{i \in \mathbb{N}; a_2(i) \neq 0\}$$
$$d_b = \max\{i \in \mathbb{N}; b(i) \neq 0\}$$

とおく。m を a_1, a_2, b に対応する $\mathrm{Bich}(X, \mathbb{T})$ の元とする。つぎの(i)または(ii)を仮定する：

(i) $d_b \leqq d_1 \leqq d_2$, $d_b < d_2$

(ii) $d_1 \leqq d_2 \leqq d_b$, $d_1 < d_b$.

このとき、$\lambda_m(X)''$ は (hyperfinite II_1-)factor であって（R と書く）、(i)の場合には

$$\sigma^n(R)' \cap R = \begin{cases} \mathbb{C}1 & (0 \leqq n \leqq d_1) \\ \{u_i; 0 \leqq i \leqq n-d_1-1\}'' & (d_1+1 \leqq n \leqq d_2) \\ \{u_i, v_j; 0 \leqq i \leqq n-d_1-1,\ 0 \leqq j \leqq n-d_2-1\}'' & \end{cases}$$

$(d_2+1 \leqq n)$

(ii)の場合には

$$\sigma^n(R)' \cap R = \mathbb{C}1 \qquad (0 \leqq n \leqq d_b)$$

$$\{u_i;v_j;0\leqq i,j\leqq n-d_b-1\}'' \quad (d_b+1 \leqq n).$$

ここで、$u_i = \lambda_m(e_i{}^1)$ および $v_j = \lambda_m(e_j{}^2)$ と書いた。

証明　X の部分群 Y に対して、

$$D(Y) = \{g\in X;\ \rho(g\wedge h) = 0,\ h\in Y\}$$

とおく。(i)の場合のみ示す ((ii)の場合も同様だから)。[1;Corollary 1.3]により、次を示せば十分:

$$D(s^n(X)) = \{0\} \qquad (0 \leqq n \leqq d_1)$$

$$[e_i{}^1;0\leqq i\leqq n-d_1-1] \qquad (d_1+1 \leqq n \leqq d_2)$$

$$[e_i{}^1,e_j{}^2;0\leqq i\leqq n-d_1-1,\ 0\leqq j\leqq n-d_2-1]$$

$$(d_2+1 \leqq n)$$

ここで $[e_i{}^1;0\leqq i\leqq n-d_1-1]$ は $e_i{}^1$, $0\leqq i\leqq n-d_1-1$ の生成する X の部分群をあらわす。左辺が右辺を含むことは容易である。

$D(s^n(X))$ が 0 でない元 g を含むと仮定して、

$j_1 = \max\{j;g_j{}^1 \neq 0\}$ または $j_2 = \max\{j;g_j{}^2 \neq 0\}$ とおく。

補題３により、

$$(*) \quad \sum_0^{j_1} g_j{}^1 a_1(k-j) + \sum_0^{j_2} g_j{}^2 b(k-j) = 0$$

$$(**) \quad \sum_0^{j_2} g_j{}^2 a_2(k-j) + \sum_0^{j_1} g_j{}^1 b(k-j) = 0$$

が $k\geqq n$ に対して成り立つ。

ステップ(1)　$0 \leqq n \leqq d_1$ のとき、$g_j{}^1 \neq 0$ なる j が存在するとする。もし $j_1 \leqq j_2$ ならば、$k = d_2 + j_2 \geqq d_1 \geqq n$ に対する等式(**)を用いる。$d_b < d_2$ であるから、等式(**)の項は $g_{j_2}{}^2 a_2(d_2)$ 以外は 0、従って $g_{j_2}{}^2 a_2(d_2) = 0$ である。$a_2(d_2) = 1$ であるから、$g_{j_2}{}^2 = 0$ となるが、これは矛盾。もし $j_1 > j_2$ または $g_j{}^2 = 0$, $j\geqq 0$ ならば、$k = d_1 + j_1 \geqq n$ に対する等式(*)を用いる。等式(*)の項は $g_{j_1}{}^1 a_1(d_1)$ 以外は 0、従って $g_{j_1}{}^1 a_1(d_1) = 0$ であり、これは矛盾。結局 $g_j{}^1 = 0$, $j\geqq 0$ でなければならない。

ステップ(2) $d_1+1 \leqq n$ のとき、$g_s^2 = 1$ なる $s \geqq 0$ が存在するとする。(1)と同様に矛盾が導けて、$g_j^2 = 0$, $j \geqq 0$ とわかる。$g_s^1 = 1$ なる $s \geqq n-d_1$ が存在するとする。もし $j_1 \leqq j_2$ ならば、仮定より $j_1 \geqq s \geqq n-d_1$ だから、$k = d_2 + j_2 \geqq d_1 + j_1 \geqq n$ に対する等式(**)を用いて、またもし $j_1 > j_2$ ならば $k = d_1 + j_1 \geqq n$ に対する等式(*)を用いて矛盾を導ける。従って $g_j^1 = 0$, $j \geqq n-d_1$ でなければならない。

ステップ(3) $d_2+1 \leqq n$ のとき、上と同様に $g_j^2 = 0$, $j \geqq n-d_2$ が示せる。 終

注意　上の定理で、(i) および (ii) の条件は落とすことができない。たとえば、$a_1 = a_2 = b$ とすると、$g_j^1 = g_j^2$, $j \geqq 0$ なるどのような X の元 g も $\rho(g \wedge X) = 0$ を満たす。

系　$\mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2$-shift の外部共役類は少なくとも可算無限個存在する。

証明　整数 $d \geqq 1$ に対して、$a_1^d = a_2^d = (0,\cdots,0,\overset{(d)}{1},\underline{0},\cdots)$ および $b = (1,\underline{0},\cdots)$ とする。このとき、$d_b < d_1 = d_2$ である。σ_d を対応する $\mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2$-shift とすると、定理によって

$$\sigma_d^n(R)' \cap R = \mathbb{C}1, \quad 0 \leqq n \leqq d \text{ および}$$

$$\sigma_d^n(R)' \cap R \neq \mathbb{C}1, \quad n \geqq d+1$$

である。相対可換子環は外部共役不変量だから、$d_1 \neq d_2$ ならば σ_{d_1} と σ_{d_2} は外部共役ではない。 終

命題４と定理５のある意味の逆を考えてみよう。a_1, a_2, b を signature sequence とし、m を対応する $\mathrm{Bich}(X, \mathbb{T})$ の元とする。$\lambda_m(X)''$ が factor と仮定する。このとき、a_1, a_2, b の少なくとも１つは not essentially periodic でなければならないであろうか、また、それらの support は有限でなければならないであろうか？

例3.　$a_1 = (0,1,\underline{0},\cdots)$, $a_2 = (0,\underline{1},1,\cdots)$, $b = (1,\underline{0},0,\cdots)$ とする。このとき、これらすべては essentially periodic であり、うち a_2 は support が有限でない。しかし $\lambda_m(X)''$ は factor である。

index 4 の shift として、$\mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2$-shift と 4-shift の関係は興味深い問題であると思われる。

命題6.　$\mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2$-shift と 4-shift は共役になり得ない。

証明　任意の 4-shift σ_4 に対して $\sigma_4(R)' \cap R = \mathbb{C}1$ であるから（[1;Proposition 3.1]を参照）、σ を任意の $\mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2$-shift とするとき、$\sigma(R)' \cap R \neq \mathbb{C}1$ ならば（外部）共役ではあり得ず、$\sigma(R)' \cap R = \mathbb{C}1$ ならば[1;Proposition 2.5]によって共役ではない。　終

例4.（4-shift と外部共役になり得ない $\mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2$-shift）

$a_1 = (0,1,\underline{0},\cdots)$, $a_2 = (0,0,0,1,\underline{0},\cdots)$, $b = (0,0,1,\underline{0},\cdots)$ とする。このとき、（$d_1 < d_b < d_2$ であって、）

$$
D(s^n(X)) = \begin{cases}
\{0\} & n = 0 \\
[e_1^1 + e_0^2] & n = 1 \\
[e_1^1 + e_0^2,\ e_2^1 + e_1^2] & n = 2 \\
[e_0^1,\ e_1^1 + e_0^2,\ e_2^1 + e_1^2,\ e_3^1 + e_2^2] & n = 3 \\
[e_i^1,\ e_j^2,\ e_{n-2}^1 + e_{n-3}^2,\ e_{n-1}^1 + e_{n-2}^2, & \\
\quad e_n^1 + e_{n-1}^2\ ;\ 0 \leqq i \leqq n-3,\ 0 \leqq j \leqq n-4] & n \geqq 4.
\end{cases}
$$

特に、$\sigma(R)' \cap R \neq \mathbb{C}1$ であるから、この $\mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2$-shift はいかなる 4-shift とも外部共役になり得ない。

References

[1] D.Bures and H.S.Yin, Shifts on the hyperfinite factor of type II_1, J.Operator Theory 20(1988), 91-106.

[2] M.Choda, Shift on the hyperfinite II_1 factor, J.Operator Theory 17(1987), 223-235.

[3] M.Enomoto and Y.Watatani, Powers' binary shifts on the hyperfinite factor of type II_1, Proc.Amer.Math.Soc.,105 No.2(1989), 371-374.

[4] M.Enomoto, M.Choda, Y.Watatani, Generalized Powers' binary shifts on the hyperfinite II_1 factor, Math.Japon., 33 No.6(1988), 831-843.

[5] M.Enomoto, M.Nagisa, Y.Watatani, H.Yosida, Relative commutant algebras of Powers' binary shifts on the hyperfinite II_1-factor, preprint 1989.

[6] V.Jones, Index for subfactors, Invent Math.,72(1983), 1-25.

[7] R.T.Powers, An index theory for semigroups of *-endo morphisms of B(H) and type II_1factors, Can.J.Math., 40(1988), 86-114.

[8] G.Price, Shifts on type II_1factors, Can.J.Math., 39(1987), 492-511.

[9] G.Price, Shifts on integer index on the hyperfinite II_1 factor, Pacific J.Math.,132(1988), 379-390.

[10] K.Watanabe,Shifts with two generators on the hyper-finite II_1-factor, Nihonkai Math.J.,1(1990),121-135.